＜円周角の定理の証明＞

(1)　PAO　　(2)　BPO　　(3)　OPB

問1

(1)　円周角の定理により　　$\alpha=\angle\mathrm{BAC}=50^\circ$，$\beta=2\angle\mathrm{BAC}=100^\circ$

(2)　円周角の定理により　　$\alpha=\angle\mathrm{ACB}=20^\circ$，$\beta=\angle\mathrm{CAD}=40^\circ$

(3)　BD は直径であるから，円周角の定理により　　$\angle\mathrm{BAD}=90^\circ$

よって　　$\alpha=90^\circ-55^\circ=35^\circ$

AC は直径であるから，円周角の定理により　　$\angle\mathrm{ABC}=90^\circ$

△ABC の内角の和は 180° であるから　　$\beta=180^\circ-90^\circ-55^\circ=35^\circ$

問2

(1)　円周角の定理により

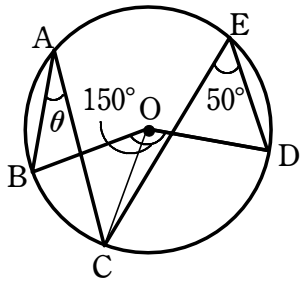
$\angle\mathrm{BOC}=2\angle\mathrm{BAC}=2\theta$

$\angle\mathrm{COD}=2\angle\mathrm{CED}=2\times50^\circ=100^\circ$

$\angle\mathrm{BOC}+\angle\mathrm{COD}=\angle\mathrm{BOD}$

であるから　　$2\theta+100^\circ=150^\circ$

よって　　$\theta=25^\circ$



(2)　円周角の定理により

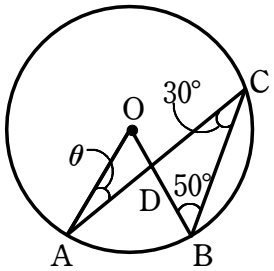
$\angle\mathrm{AOB}=2\angle\mathrm{ACB}=2\times30^\circ=60^\circ$

また　　$\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{DBC}+\angle\mathrm{DCB}=50^\circ+30^\circ=80^\circ$

$\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{OAD}+\angle\mathrm{AOB}=\theta+60^\circ$

よって　　$\theta+60^\circ=80^\circ$

ゆえに　　$\theta=20^\circ$



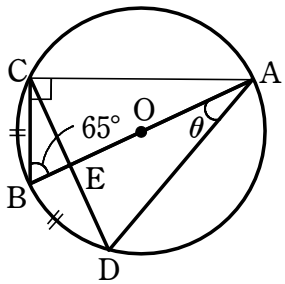
(3)　AB は直径であるから，円周角の定理により

$\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$

△ABC の内角の和は 180° であるから

$\angle\mathrm{BAC}=180^\circ-90^\circ-65^\circ=25^\circ$

$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}=\overset{\frown}{\mathrm{BD}}$ であるから　　$\theta=\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{BAC}=25^\circ$



問３

(1)　B と C は直線 AD に関して同じ側にあり，$\angle ABD = \angle ACD$ であるから，円周角の定理の逆により，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にある。

よって，円周角の定理により　　$\theta = \angle ADB = 25^\circ$

(2)　$\triangle ABC$ の内角の和は 180° であるから

$$\angle BAC = 180^\circ - 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$$

よって，A と D は直線 BC に関して同じ側にあり，$\angle BAC = \angle BDC$ であるから，円周角の定理の逆により，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にある。

よって，円周角の定理により　　$\angle ADB = \angle ACB = 25^\circ$

また　　$\angle BEA = \angle EDA + \angle EAD$

よって　　$55^\circ = 25^\circ + \theta$　　ゆえに　　$\theta = 30^\circ$

＜三平方の定理の証明＞

(1)　$(a+b)^2$　　(2)　$\frac{1}{2}ab$

問4

(1)　三平方の定理より

$6^2+8^2=x^2$

$x^2=100$

$x>0$ より，$x=10$

(2)　三平方の定理より

$x^2+2^2=4^2$

$x^2=12$

$x>0$ より，$x=2\sqrt{3}$

(3)　三平方の定理より

$x^2+6^2=9^2$

$x^2=45$

$x>0$ より，$x=3\sqrt{5}$

問5

(1)　$a=4$，$b=5$，$c=6$ とすると

$a^2+b^2=4^2+5^2=41$

$c^2=6^2=36$

よって，$a^2+b^2=c^2$ が成り立たないので，直角三角形ではない

(2)　$a=7$，$b=24$，$c=25$ とすると

$a^2+b^2=7^2+24^2=625$

$c^2=25^2=625$

よって，$a^2+b^2=c^2$ が成り立つので，直角三角形である

(3)　$a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{5}$，$c=\sqrt{7}$ とすると

$a^2+b^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{5})^2=7$

$c^2=(\sqrt{7})^2=7$

よって，$a^2+b^2=c^2$ が成り立つので，直角三角形である

(4)　$a=6$，$b=6\sqrt{3}$，$c=12$ とすると

$a^2+b^2=6^2+(6\sqrt{3})^2=144$

$c^2=12^2=144$

よって，$a^2+b^2=c^2$ が成り立つので，直角三角形である

問6

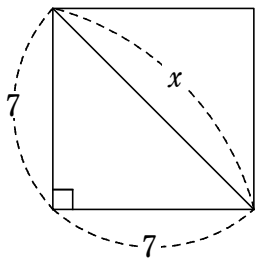
(1)　三平方の定理より

$7^2+7^2=x^2$

$x^2=98$

$x>0$ より，$x=7\sqrt{2}$

よって，対角線の長さは $7\sqrt{2}$ cm



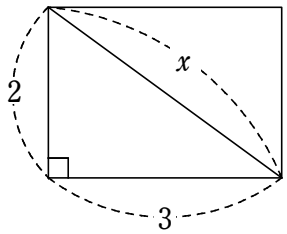
(2)　三平方の定理より

$2^2+3^2=x^2$

$x^2=13$

$x>0$ より，$x=\sqrt{13}$

よって，対角線の長さは $\sqrt{13}$ cm

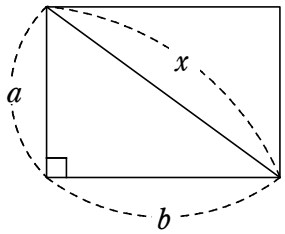


(3)　三平方の定理より

$$a^2+b^2=x^2$$

$x>0$ より，$x=\sqrt{a^2+b^2}$

よって，対角線の長さは $\sqrt{a^2+b^2}$ cm



問7

(1)　右の図で，頂点 A から辺 BC に垂線 AH をひくと

H は辺 BC の中点になるから

BH＝3 cm

△ABH は∠AHB＝90° の直角三角形なので，

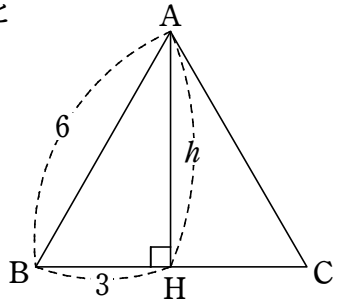
AH＝ h cm とすると，三平方の定理より

$$3^2+h^2=6^2$$
$$h^2=27$$

$h>0$ より，$h=3\sqrt{3}$

よって，正三角形の面積は

$$\frac{1}{2}\times6\times3\sqrt{3}=9\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$



(2)　右の図で，頂点 A から辺 BC に垂線 AH をひくと

H は辺 BC の中点になるから

BH＝5 cm

△ABH は∠AHB＝90° の直角三角形なので，

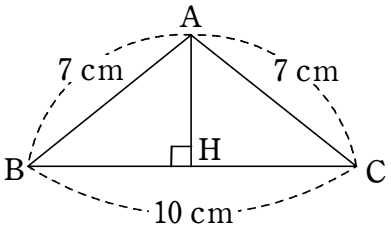
AH＝ h cm とすると，三平方の定理より

$$5^2+h^2=7^2$$
$$h^2=24$$

$h>0$ より，$h=2\sqrt{6}$

よって，二等辺三角形の面積は

$$\frac{1}{2}\times10\times2\sqrt{6}=10\sqrt{6}\ \text{cm}^2$$



問8

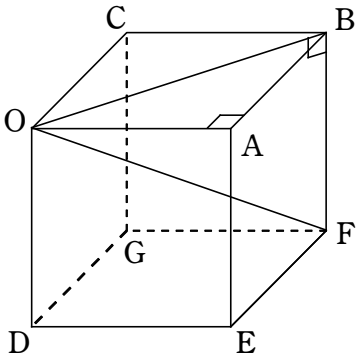
△OAB は直角三角形なので，三平方の定理より

$$OB^2=6^2+6^2=72$$

△OBF は直角三角形なので，三平方の定理より

$$OF^2=OB^2+BF^2=72+6^2=108$$

OF>0 より，OF＝ $6\sqrt{3}$ cm



問９

△OABは直角三角形なので，三平方の定理より

$$6^2+OA^2=10^2$$

$$OA^2=64$$

OA＞0より，OA＝8

よって，円錐の体積は

$$\frac{1}{3}\times(\text{円 O の面積})\times OA=\frac{1}{3}\times\pi\times6^2\times8=96\pi\ \text{cm}^3$$